

# PEMAHAMAN MATEMATIKA DALAM KAJIAN TEORI APOS (ACTION, PROCESS, OBJECT, AND SCHEMA)

FATRIMA SANTRI SYAFRI

**Abstract:** *Mathematics is a science that deals with ideas or concepts in the abstract reasoning. Mathematics has a different understanding of the concepts of science another. In mathematical understanding many factors that are indicators of the achievement of the mathematics understanding. The understanding gained from the process of learning mathematics. One of the factors that affect the learning process is the student of mathematics. Students will understand the math properly understanding their math based on the mathematical concept it self. To analyze student understanding of the concepts of mathematics, teachers must determine the level of mental development of the students. An understanding of the mathematical concept is the result of construction and reconstruction of mathematical objects. Construction and reconstruction is done through activities such as math actions, process, objects are organized in a scheme to solve the problem. One theory of learning that can be used as a reference to see the students' understanding of mathematics is the theory APOS (Action, process, Object, and Schema). APOS In theory, there may be students who did not start through the early stages of APOS theory is action, there may be students who started from the object passed next stage. So do not rule out the possibility that, if the students are already in the stage of an object or even a scheme, then the student may not need to go through the stage of the process. This is because the proces of transformation has been interiorized perfectly into the minds of students. APOS theory can be used to analyze the cognitive structure of the student in understanding a concept. For example in the understanding of students in math concept.*

**Kata Kunci:** Pemahaman Matematika, Teori APOS

## A. PENDAHULUAN

Matematika adalah suatu ilmu pengetahuan yang berbeda dari ilmu pengetahuan lainnya. Ilmu matematika lebih menekankan aktifitas dalam dunia rasio (penalaran), sedangkan ilmu lain lebih menekankan hasil observasi atau eksperimen di samping penalaran.<sup>1</sup> Perbedaan inilah yang menekankan pada pemahaman suatu proses dalam memperoleh konsep dalam pembelajaran matematika. Proses pembelajaran matematika membutuhkan kemampuan kognitif yang tinggi, sebagaimana yang diungkapkan oleh Bloom. Bloom membagi tingkat kemampuan

---

<sup>1</sup> Erman Suherman et.al, *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*, (Bandung: JICA, 2003), hal. 16

atau tipe hasil belajar yang termasuk aspek kognitif menjadi enam, yaitu pengetahuan hapalan, pemahaman atau komprehensi, aplikasi, analisis, sintesis, dan evaluasi.<sup>2</sup> Dari pengertian di atas, dalam pemahaman matematika tidak hanya terfokus pada penalaran namun ada faktor proses dari pemahaman tersebut.

Dalam pemahaman matematika banyak faktor yang menjadi indikator tercapainya pemahaman matematika tersebut. Pemahaman tersebut diperoleh dari proses pembelajaran matematika. Salah satu faktor yang mempengaruhi proses belajar mengajar matematika adalah siswa.<sup>3</sup>

Pengetahuan yang dimiliki oleh siswa merupakan konstruksi dari dirinya sebagai konstruksi kognitif terhadap objek, pengalaman, maupun lingkungannya. Proses pembelajaran yang seperti inilah yang disebut dengan proses belajar konstruktivistik. Menurut pandangan ini siswa harus aktif melakukan kegiatan, aktif berpikir, menyusun konsep dan memberi makna hal-hal yang sedang dipelajari. Maka dari itu, tujuan utama dari pembelajaran sebenarnya adalah pemahaman. Dengan pemahaman, siswa akan mampu menghadapi berbagai persoalan matematika dalam situasi yang berbeda-beda. Akan tetapi kenyataan menunjukkan bahwa memahami suatu konsep dengan baik seringkali dilewatkan oleh siswa. Siswa sering mengabaikan definisi, teorema, atau sifat-sifat yang berlaku dalam suatu topik bahasan matematika. Mereka cenderung kurang mampu dalam menghubungkan antar konsep matematika yang telah dimiliki dengan konsep yang baru diperoleh.

Untuk menganalisis pemahaman siswa mengenai konsep matematika, guru harus mengetahui tingkat perkembangan mental siswanya. Pemahaman terhadap suatu konsep matematika merupakan hasil konstruksi dan rekonstruksi terhadap objek-objek matematika. Konstruksi dan rekonstruksi tersebut dilakukan melalui aktifitas berupa aksi-aksi matematika, proses-proses, objek-objek yang diorganisasikan dalam suatu skema untuk memecahkan masalah.<sup>4</sup>

---

<sup>2</sup> Ngalim Purwanto, *Prinsip – prinsip dan Teknik Evaluasi Pengajaran*, (Bandung:Remaja Rosdakarya, 2008) hal.43

<sup>3</sup> Herman Hudojo, *Mengajar Belajar Matematika*, (Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Dirjen Dikti PPLPTK, 1988), hal.6

<sup>4</sup> Ed Dubinsky, *Using A Theory of Learning in College Mathematics Course*, (Online, 2000), (<http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum12.htm> or <http://www.telri.ac.uk/>, diakses tanggal 27Juni 2016), hal. 6

Dari beberapa pernyataan di atas, maka dalam pembelajaran matematika diperlukan adanya teori pembelajaran yang dapat menjawab permasalahan tersebut. Salah satu teori yang dapat dijadikan referensi adalah teori APOS (*Action, Proseses, Object, and Schema*) yang dikemukakan oleh Dubinsky. Maka dalam tulisan ini penulis akan membahas tentang pemahaman matematika dalam kajian teori APOS (*Action, Proseses, Object, and Schema*).

## B. PEMBAHASAN

### 1. Hakekat Matematika

Istilah *matematika* (Indonesia), *methematics* (Inggris), *matematik* (Jerman), *mathemetique* (Prancis), *matematica* (Italia), *matematikeski* (Rusia) atau *mathematick/wiskude* (Belanda) berasal dari perkataan *mathematica*, yang mulanya diambil dari perkataan Yunani *matematike* yang berarti “*relating to learning*”. Perkataan ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (knowledge, science). Perkataan *mathematike* berhubungan sangat erat dengan sebuah kata lainnya yang serupa yaitu *mathenein* yang berarti *belajar (berpikir)*<sup>5</sup>

Matematika memiliki pengertian yang beragam. Setiap tokoh memberikan definisi tentang matematika sesuai dengan sudut pandang mereka. Di bawah ini disajikan beberapa definisi atau pengertian tentang matematika.<sup>6</sup>

- a). Menurut Ruseffendi matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran.<sup>7</sup>
- b). Menurut James & James dalam kamus matematikanya mengatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan yang lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri.<sup>8</sup>
- c). Johnson dan Rising dalam bukunya mengatakan bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logik, matematika itu

---

<sup>5</sup> Erman Suherman et.al, *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*, (Bandung: JICA, 2003), hal. 15-16

<sup>6</sup> Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia* (Jakarta: Direktorat Jendral DIKTI, DEPDIKNAS, 2000), hal. 11

<sup>7</sup> Erman Suherman et. al, *Stategi Pembelajaran Matematika...*, hal.16

<sup>8</sup> *Ibid...*, hal. 16

adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai ide daripada mengenai bunyi.<sup>9</sup>

- d). Herman Hudojo dalam bukunya mengatakan bahwa: Matematika sebagai ilmu mengenai struktur dan hubungan-hubungannya, simbol-simbol diperlukan. Simbol-simbol itu penting untuk memanipulasi aturan-aturan dengan operasi yang ditetapkan. Simbolisasi menjamin adanya komunikasi dan mampu memberikan keterangan untuk membentuk suatu konsep baru. Konsep baru terbentuk karena adanya pemahaman terhadap konsep sebelumnya sehingga matematika itu konsep-konsepnya tersusun secara hirarkis. Simbolisasi itu barulah berarti bila suatu simbol itu dilandasi suatu ide. Jadi kita harus memahami ide yang terkandung dalam simbol tersebut. Dengan perkataan lain, ide harus dipahami terlebih dahulu sebelum ide tersebut disimbolkan.<sup>10</sup>

Dari beberapa pengertian di atas, maka matematika adalah suatu ilmu yang berkaitan dengan ide/konsep yang abstrak dalam penalarannya. Maka dari pembahasan tersebut, siswa akan memahami matematika dengan baik jika pemahaman matematika mereka berdasarkan pada konsep matematika itu sendiri.

## 2. Pemahaman Matematika

Pemahaman adalah proses, cara, perbuatan memahami atau memahamkan.<sup>11</sup> Pemahaman (*understanding*) yaitu kedalaman kognitif, dan afektif yang dimiliki oleh individu.<sup>12</sup> Selanjutnya, Dubinsky menyatakan pemahaman tentang konsep matematika merupakan hasil konstruksi dan rekonstruksi dari objek-objek matematika yang dilakukan melalui aktivitas aksi, proses, dan objek yang dikoordinasi dalam suatu skema.<sup>13</sup>

Skema merupakan struktur kognitif yang digunakan seseorang untuk mengadaptasi dan mengorganisasikan stimulus (pengetahuan) yang datang dari

---

<sup>9</sup> *Ibid...*, hal. 17

<sup>10</sup> Herman Hudojo, *Mengajar Belajar...*, hal. 3

<sup>11</sup> *Ibid...* hal. 979

<sup>12</sup> E, Mulyasa. *Kurikulum Berbasis Kompetensi*. (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2010), hal. 39

<sup>13</sup> Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal. 11

lingkungan.<sup>14</sup> Dapat diartikan bahwa skema datang dengan adanya stimulus yang berkaitan atau dipengaruhi oleh alam sekitar dan situasi sekelilingnya. Sedangkan Bartlett menyatakan bahwa skema merupakan penuntun dalam melakukan pengorganisasian informasi (pengetahuan) yang masuk ke dalam sistem memori pada suatu kumpulan pengetahuan.<sup>15</sup>

Pemahaman siswa terhadap konsep matematika menurut NCTM<sup>16</sup> dapat dilihat dari kemampuan siswa dalam:

- 1) Mendefinisikan konsep secara verbal dan tulisan;
- 2) Mengidentifikasi dan membuat contoh dan bukan contoh;
- 3) Menggunakan model, diagram dan simbol-simbol untuk merepresentasikan suatu konsep;
- 4) Mengubah suatu bentuk representasi ke bentuk lainnya;
- 5) Mengenal berbagai makna dan interpretasi konsep;
- 6) Mengidentifikasi sifat-sifat suatu konsep dan mengenal syarat yang menentukan suatu konsep;
- 7) Membandingkan dan membedakan konsep-konsep.

Menurut Duffin & Simpson<sup>17</sup> pemahaman sebagai kemampuan siswa untuk:

- 1) Menjelaskan konsep, dapat diartikan siswa mampu untuk mengungkapkan kembali apa yang telah dikomunikasikan kepadanya. Contohnya pada saat siswa belajar geometri pokok bahasan Bangun Ruang Sisi Lengkung (BRSL) maka siswa mampu menyatakan ulang definisi dari tabung, unsur-unsur Tabung, definisi kerucut dan unsur-unsur Kerucut., definisi bola. Jika siswa diberi pertanyaan “ Sebutkan ciri khas dari BRLS?”, maka siswa dapat menjawab pertanyaan tersebut dengan benar.

---

<sup>14</sup> Herman Hudojo, Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika, (Malang: IKIP Malang, 2003), hal. 59

<sup>15</sup> Davis, G.E., Tall. What is A Schema?,(online).

(<http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpop/schemes.htm>), diakses 27 Juni 2016

<sup>16</sup> NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA : NCTM

<sup>17</sup> Duffin, J.M.& Simpson, A.P. 2000. A Search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*. 18(4): hal 415-427

- 2) Menggunakan konsep pada berbagai situasi yang berbeda, contohnya dalam kehidupan sehari-hari jika seorang siswa berniat untuk memberi temannya hadiah ULTAH berupa celengan kaleng yang telah dilapisi suatu bahan kain, kalengnya telah tersedia di rumah tetapi bahan kainnya harus dibeli. Siswa tersebut harus memikirkan berapa meter bahan kain yang harus dibelinya? Berapa uang yang harus dimiliki untuk membeli bahan kain? Untuk memikirkan berapa bahan kain yang harus dibelinya berarti siswa tersebut telah mengetahui konsep luas permukaan kaleng yang akan dilapisinya dan konsep aritmatika social.
- 3) Mengembangkan beberapa akibat dari adanya suatu konsep, dapat diartikan bahwa siswa paham terhadap suatu konsep akibatnya siswa mempunyai kemampuan untuk menyelesaikan setiap masalah dengan benar

Sejalan dengan hal di atas Depdiknas mengungkapkan bahwa, pemahaman konsep merupakan salah satu kecakapan atau kemahiran matematika yang diharapkan dapat tercapai dalam belajar matematika yaitu dengan menunjukkan pemahaman konsep matematika yang dipelajarinya, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah.

Menurut Walle “pemahaman dapat didefinisikan sebagai ukuran kualitas dan kuantitas hubungan suatu ide dengan ide yang telah ada”. Setiap siswa memiliki kemampuan pemahaman yang berbeda tergantung pada ide yang dimiliki dan pembuatan hubungan antara ide yang ada dengan ide baru.<sup>18</sup>

Menurut Bloom, mengklasifikasikan pemahaman pada jenjang kognitif urutan kedua setelah pengetahuan, jenjang kognitif tahap pemahaman ini mencakup hal-hal berikut:

- a. pemahaman konsep;
- b. pemahaman prinsip, aturan, dan generalisasi;
- c. pemahaman terhadap struktur matematika;
- d. kemampuan untuk membuat tranformasi;

---

<sup>18</sup> Walle, J.A.V.D. (2008). *Matematika Sekolah Dasar dan Menengah Pengembangan Pengajaran*. Jakarta: Erlangga.hal. 26

- e. kemampuan untuk mengikuti pola berpikir;
- f. kemampuan untuk membaca dan menginterpretasikan masalah sosial atau data matematika.<sup>19</sup>

Pemahaman akan sebuah konsep ilmu pengetahuan yang sedang dipelajari memiliki peranan yang sangat penting. Siswa akan berkembang ke jenjang kognitif yang lebih tinggi jika ia memiliki pemahaman konsep yang baik. Jika pemahaman konsep dikuasai dengan baik maka siswa akan mampu menghubungkan atau mengaitkan sebuah konsep yang satu dengan yang lainnya. Selain itu, konsep tersebut dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan dari mulai yang sederhana hingga ke permasalahan yang lebih kompleks.

Ruseffendi (2006: 221), mengategorikan pemahaman menjadi tiga macam, yaitu:

1. pengubahan (penerjemahan);
2. pemberian arti (interpretasi);
3. pembuatan ekstrapolasi.<sup>20</sup>

Pengubahan (penerjemahan), yaitu kemampuan untuk mengubah atau menerjemahkan simbol ke dalam kata-kata dan sebaliknya, mampu mengartikan suatu kesamaan dan mampu mengkonkritkan konsep yang abstrak. Pemberian arti (interpretasi), yaitu kemampuan untuk memahami sebuah konsep yang disajikan dalam bentuk lain seperti diagram, tabel, grafik dan lain-lain. Sedangkan Pembuatan ekstrapolasi, yaitu kemampuan untuk memperkirakan atau meramalkan suatu kecenderungan yang ada menurut data tertentu. Menurut Polya, membedakan 4 jenis pemahaman, yaitu:

1. pemahaman mekanikal, yaitu dapat mengingatkan dan menerapkan sesuatu secara rutin atau perhitungan sederhana;
2. pemahaman induktif, yaitu dapat mencobakan sesuatu dalam kasus sederhana dan tahu bahwa sesuatu itu berlaku dalam kasus serupa;
3. pemahaman rasional, yaitu dapat membuktikan kebenaran sesuatu;

---

<sup>19</sup> Suherman, dkk. (2003). *Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Bandung: Jica hal. 29-35

<sup>20</sup> Ruseffendi, E.T. (2006). *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Potensinya dalam Pengajaran Matematika Untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito hal.221

4. pemahaman intuitif, yaitu dapat memperkirakan kebenaran sesuatu tanpa ragu-ragu, sebelum menganalisis secara analitik.<sup>21</sup>

Berbeda dengan Polya, Pollatsek, menggolongkan pemahaman dalam dua jenis, yaitu:

1. pemahaman komputasional;
2. pemahaman fungsional.<sup>22</sup>

Pemahaman komputasional adalah kemampuan menerapkan rumus dalam perhitungan sederhana dan mengerjakan perhitungan secara algoritma. Sedangkan pemahaman fungsional adalah kemampuan mengkaitkan satu konsep/prinsip lainnya dan menyadari proses yang dikerjakannya. Sementara itu, Skemp membedakan pemahaman ke dalam tiga macam, yaitu:

1. pemahaman instrumental (*instrumental understanding*);
2. pemahaman relasional (*relational understanding*);
3. pemahaman logis (*logical understanding*).<sup>23</sup>

Pemahaman instrumental adalah kemampuan seseorang menggunakan prosedur matematis untuk menyelesaikan suatu masalah tanpa mengetahui mengapa prosedur itu digunakan. Dengan kata lain siswa hanya mengetahui “bagaimana” tetapi tidak mengetahui “mengapa”. Pada tahapan ini, pemahaman konsep masih terpisah dan hanya sekedar hafal suatu rumus untuk menyelesaikan permasalahan rutin / sederhana sehingga siswa belum mampu menerapkan rumus tersebut pada permasalahan baru yang berkaitan. Sementara itu, pemahaman relasional adalah kemampuan seseorang menggunakan prosedur matematis dengan penuh kesadaran bagaimana dan mengapa prosedur itu digunakan. Secara ringkasnya, siswa mengetahui keduanya yaitu “bagaimana” dan “mengapa”. Pada tahap ini, siswa dapat mengaitkan antara satu konsep atau prinsip dengan konsep atau prinsip lainnya dengan benar dan menyadari proses yang dilakukan. Sedangkan pemahaman logis berkaitan erat dengan meyakinkan diri sendiri dan meyakinkan orang lain. Dengan kata lain, siswa dapat

---

<sup>21</sup> Jihad, A. (2008). *Pengembangan Kurikulum Matematika*. Yogyakarta: Multi Pressindo hal. 167

<sup>22</sup> Sumarmo, U. (2010). *Berfikir dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan Pada Peserta Didik*. Jurnal FMIPA UPI Bandung. Hal. 4-5

<sup>23</sup> Idris, N. (2009). “Enhancing Students’ Understanding In Calculucus Trough Writing”. *International Electronic Journal of Mathemathics Education*. 4, (1). Hal.37.

mengkonstruksi sebuah bukti sebelum ide-ide yang dimilikinya dipublikasikan secara formal atau informal sehingga membuat siswa tersebut merasa yakin untuk membuat penjelasan kepada siswa yang lain.

“Secara umum, indikator pemahaman matematika meliputi: mengenal, memahami dan menerapkan konsep, prosedur, prinsip dan idea matematika”<sup>24</sup>

Adapun indikator yang digunakan adalah indikator pemahaman konsep menurut Jihad dan Haris , sebagai berikut.

1. kemampuan menyatakan ulang sebuah konsep yang dipelajari;
2. kemampuan mengklasifikasikan objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya);
3. kemampuan menyebutkan contoh dan non-contoh dari konsep;
4. kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis;
5. kemampuan menggunakan, memanfaatkan dan memilih prosedur atau operasi tertentu;
6. kemampuan mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.
7. kemampuan mengembangkan syarat perlu dan syarat cukup suatu konsep;<sup>25</sup>

Pemahaman matematis penting untuk belajar matematika secara bermakna, tentunya para guru mengharapkan pemahaman yang dicapai siswa tidak terbatas pada pemahaman yang bersifat dapat menghubungkan. Menurut Ausubel bahwa belajar bermakna bila informasi yang akan dipelajari siswa disusun sesuai dengan struktur kognitif yang dimiliki siswa sehingga siswa dapat mengkaitkan informasi barunya dengan struktur kognitif yang dimiliki. Artinya siswa dapat mengkaitkan antara pengetahuan yang dipunyai dengan keadaan lain sehingga belajar dengan memahami.

Terdapat berbagai kerangka berpikir mengenai pemahaman matematika, menurut Skemp pemahaman matematika dalam dua jenis yaitu pemahaman relasional

---

<sup>24</sup> Ibid ... Sumarmo hal.4

<sup>25</sup> Jihad, A. dan Haris. (2010). Evaluasi Pembelajaran. Yogyakarta: Multi Pressindo. Hal. 149

dan pemahaman instrumental. “*Relational understanding is described as knowing both what to do and why, whereas instrumental understanding entails without reasons*”.<sup>26</sup>

Tingkat-tingkat pemahaman suatu disiplin ilmu menurut Perkins dan Simmons terbagi ke dalam empat tingkatan, “*four interlocked levels of knowledge : the content frame, the problem-solving frame, the epistemic frame, and the inquiry frame*” .<sup>27</sup> Selanjutnya Kinach, merekonstruksi klasifikasi pemahaman dari Skemp untuk memodifikasi *levels of disciplinary understanding* sehingga terdapat lima tingkatan pemahaman yaitu, “*content, concept, problem solving, epistemic, and inquiry*” .<sup>28</sup>

Berdasarkan Kinach, dalam memodifikasi tingkat pemahaman dari Perkins dan Simmons untuk bidang matematika menjadi enam level pemahaman dengan menguraikan *content frame* menjadi dua tahap pemahaman yaitu *content-level understanding* (tahap pemahaman konten) dan *concept level of disciplinary understanding* (tahap pemahaman konsep). Tahap pemahaman konten terkait dengan kemampuan memberikan contoh–contoh yang benar tentang kosa kata (istilah dan notasi), mengingat fakta-fakta dasar, dan terampil menggunakan algoritma atau mereplikasi strategi berpikir dalam situasi tertentu yang telah diajarkan sebelumnya. Pengetahuan pada tahap ini adalah pengetahuan yang “diterima” siswa, diberikan kepada mereka dalam bentuk informasi atau keterampilan yang terisolasi bukan diperoleh siswa secara aktif. Pemahaman seperti itu merupakan pemahaman matematika yang paling dangkal.<sup>29</sup>

Tingkat pemahaman konsep setingkat lebih tinggi dari pemahaman konten , dimana siswa terlibat aktif mengidentifikasi, menganalisis dan mensintesis pola-pola serta saling keterkaitan dalam memperoleh pengetahuan. Ciri-ciri dari tingkat

---

<sup>26</sup> Even, R. dan Tirosh, D. (2002). Teacher Knowledge and Understanding of Students' Mathematical Learning. Dalam L. D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Hal. 223

<sup>27</sup> Perkins, D. N. & Simmons, R. (1988). Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. Review of Educational Research, Vol. 58, No. 3 (Autumn, 1988), 303-326. Hal. 305

<sup>28</sup> Kinach, M., B. (2002). Understanding and Learning to Explain by Representing Mathematics: Epistemological Dilemmas Facing Teacher Educators in the Secondary Mathematics “Method” Course. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 153-186. Hal. 157

<sup>29</sup> Ibid ... hal. 158

pemahaman ini adalah kemampuan mengidentifikasi pola, menyusun definisi, mengaitkan konsep yang satu dengan yang lain.

Tiga tahap pemahaman berikutnya dari Kinach yaitu *problem-solving level understanding* (tahap pemahaman pemecahan masalah), *epistemic-level understanding* (tahap pemahaman epistemik) dan *inquiry-level understanding* (tahap pemahaman inkuiri), masing-masing setara dengan masing-masing kerangka tingkat pemahaman dari Perkins dan Simmons yaitu, *problem-solving frame*, *epistemic frame* dan *inquiry frame*.<sup>30</sup>

Tingkat pemahaman pemecahan masalah, diartikan sebagai alat analisis dan metode ilmiah dan pembelajar menggunakannya untuk mengajukan dan memecahkan masalah dan dilema matematika. Ciri dari tingkat pemahaman pemecahan masalah adalah kemampuan berpikir menemukan suatu pola, *working backward* (bekerja mundur), memecahkan suatu masalah yang serupa, mengaplikasikan suatu strategi dalam situasi yang berbeda atau menciptakan representasi matematika ke dalam fenomena fisik atau sosial.

Tingkat pemahaman epistemik, diartikan sebagai memberikan bukti-bukti yang sah dalam matematika, termasuk strategi dalam menguji suatu pernyataan matematika. Pemahaman pada tingkat epistemik ini menguatkan cara berpikir yang digunakan pada tingkat pemahaman konsep dan pemecahan masalah. Tingkat pemahaman inkuiri, diartikan sebagai menurunkan pengetahuan atau teori yang benar-benar baru, bukan menemukan kembali. Pemahaman inkuiri meliputi keyakinan dan strategi, baik secara umum maupun khusus dalam bekerja untuk memperluas pengetahuan. Seperti telah dikemukakan sebelumnya, bahwa kompetensi matematika yang menjadi tujuan pendidikan matematika di sekolah menurut Kilpatrick, Swafford, dan Findel yang termasuk ranah kognitif adalah *conceptual understanding*, *procedural fluency*, *strategic competence*, dan *adaptive reasoning*.<sup>31</sup>

Bila ditinjau dari level pemahaman menurut Perkins dan Simmons, *conceptual understanding* dan *procedural fluency* setara dengan *content frame*, sedangkan *strategic competence* setara dengan *problem-solving frame*, dan *adaptive reasoning* setara dengan *epistemic frame*.

---

<sup>30</sup> Ibid ... hal. 159

<sup>31</sup> Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. Hal 56

Kinach berpendapat, bahwa pemahaman instrumental dari Skemp setara dengan content-level understanding (tingkat pemahaman konten), sedangkan pemahaman relasional meliputi pemahaman konsep, pemecahan masalah, dan pemahaman epistemik, tidak termasuk pemahaman inkuiri.<sup>32</sup>

### 3. Teori APOS (Action, Processes, Object, and Schema)

Model pembelajaran yang dilandasi teori belajar APOS adalah model pembelajaran konstruktivis yang memberi kesempatan siswa mengkomunikasikan pengetahuannya setelah melakukan sesuatu dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika. Model pembelajaran tersebut berdasarkan pada teori belajar matematika *Action Process Object Schema (APOS)* dan memasukkan ke dalamnya cara berpikir *enactive, iconic, dan symbolic* dari Bruner. Oleh sebab itu sebagai landasan teori dalam uji coba model pembelajaran ini akan dikaji teori *Action Process Object Schema (APOS)* yang diadaptasi dari beberapa teori belajar Piaget dan teori belajar-mengajar Bruner.

Teori APOS adalah suatu teori belajar yang lahir dari hipotesis bahwasanya pengetahuan matematika berada dalam kecenderungan individu untuk terlibat dalam situasi masalah matematika dengan cara memanipulasi mental aksi, proses, objek dan mengorganisasi ketiganya dalam skema. Teori belajar ini muncul di kalangan Research in Undergraduate Mathenatic Education Community (RUMEC). Orang yang gencar mengembangkan Teori APOS adalah Ed. Dubinsky.<sup>33</sup>

Tujuan dari teori APOS dijelaskan sebagai berikut;

*“APOS Theory arose out of an attempt to understand the mechanism of reflective abstraction, introduced by Piaget to describe the development of logical thinking in children, and extend this idea the more advanced mathematical concepts (Dubinsky, 1991a).”<sup>34</sup>*

Teori APOS muncul dengan tujuan untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh J. Piaget yang menjelaskan perkembangan berpikir logis matematika untuk anak-anak. Kemudian ide tersebut dikembangkan untuk konsep matematika yang lebih luas, terutama untuk membentuk perkembangan berpikir logis bagi mahasiswa. Teori APOS juga sangat berguna

---

<sup>32</sup> Ibid... hal.160

<sup>33</sup> Ed. Dubinsky & McDonal, M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning..., hal. 2

<sup>34</sup> Ibid.. hal. 4

dalam memahami pembelajaran mahasiswa dalam berbagai topik pada kalkulus, aljabar abstrak, statistika, matematika diskrit, dan topik matematika lainnya.<sup>35</sup>

Teori APOS dapat digunakan untuk membandingkan kemampuan individu dalam mengkonstruksi mental yang telah terbentuk untuk suatu konsep matematika. Misalkan, ada dua individu yang kelihatannya sama-sama menguasai konsep matematika. Dengan Teori APOS dapat dideteksi lebih lanjut siapa yang konsep matematikanya lebih baik, berarti jika salah satu di antara keduanya mampu menjelaskan lebih lanjut suatu konsep sedangkan yang satunya tidak mampu, maka secara otomatis ia berada pada tingkat pemahaman yang lebih baik dari pada yang satunya. Sehingga, dapat dikatakan bahwa teori APOS ini merupakan tahapan-tahapan individu dalam memahami konsep pelajaran.

APOS adalah bentuk akronim dari action, process, object, dan schema. Menurut Dubinsky definisi teori APOS adalah sebagai berikut:

*'APOS Theory is our elaboration of the mental constructions of actions, processes, objects, and schemas. In studying how students might learn a particular mathematical concept, an essential ingredient which the researcher must provide is an analysis of the concept in terms of these specific constructs.'*<sup>36</sup>

Teori APOS adalah suatu teori konstruktivis tentang bagaimana kemungkinan berlangsungnya pencapaian/pembelajaran suatu konsep atau prinsip matematika yang dapat digunakan sebagai suatu elaborasi tentang konstruksi mental dari aksi (actions), proses (processes), objek (objects), skema (schemas). Di bawah ini akan diberikan deskripsi yang lebih lengkap untuk masing-masing tahapan konstruksi mental tersebut.

### **Aksi (action)**

Aksi didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*"An action is a transformation of objects perceived by the individual as essentially external and as requiring, either explicitly or from memory, step by step instructions on how to perform the operation."*<sup>37</sup>

Aksi (action) adalah transformasi dari objek-objek yang dipelajari dan yang dirasakan oleh siswa sebagai bagian eksternal dan sebagai kebutuhan, secara eksplisit dari memori, instruksi tahap demi tahap tentang bagaimana melakukan operasi. Dengan kata lain, aksi adalah suatu bentuk struktur

<sup>35</sup> Ibid... hal. 2

<sup>36</sup> Ed. Dubinsky, Using a Theory of Learning..., hal. 11

<sup>37</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. APOS: A Constructivist Theory..., hal.2

kognitif yang melibatkan transformasi mental atau fisik objek melalui tindakan, untuk menstimulus siswa yang merasakan objek sebagai bagian eksternal. Pada tahap aksi terjadi pengulangan fisik atau manipulasi mental dengan mentransformasikan objek matematika melalui beberapa cara atau aktifitas yang mendasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit.<sup>38</sup>

Transformasi dalam hal ini merupakan suatu reaksi eksternal yang diberikan secara rinci pada tahap-tahap yang harus dilakukan, jadi kinerja pada tahap aksi berupa aktifitas prosedural. Pada tahap ini siswa masih membutuhkan bimbingan untuk melakukan transformasi, baik secara fisik ataupun secara mental objek.

### **Proses (Process)**

Proses didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*“When an action is repeated and the individual reflects upon it, he or she can make an internal mental construction called a process which the individual can think of as performing the same kind of action, but no longer with the need of external stimuli.”<sup>39</sup>*

Proses (Process) didefinisikan sebagai struktur kognitif yang melibatkan imajinasi tentang transformasi mental atau fisik objek, sehingga siswa merasakan transformasi menjadi bagian internal dirinya dan mampu mengontrol transformasi tersebut.<sup>40</sup> Ketika tindakan-tindakan transformasi diulang, maka siswa paham bahwasanya proses transformasi yang seluruhnya berada dalam pikiran siswa tersebut dapat dilakukan tanpa membutuhkan rangsangan eksternal.<sup>41</sup>

Perubahan transformasi dari eksternal ke dalam internal (pikiran) anak disebut interiorisasi (interiorization).<sup>42</sup>

Interiorisasi dari suatu aksi merupakan perubahan aktifitas prosedural menuju konstruksi mental pada proses internal yang relatif untuk sederetan aksi

---

<sup>38</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 16

<sup>39</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>40</sup> Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-23

<sup>41</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>42</sup> Aneshkumar Maharaj (dalam Minanur Rohman), *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-23

pada objek kognitif yang dapat dilakukan atau dibayangkan untuk dilakukan dalam pikiran tanpa mengerjakan semua tahapan-tahapan pekerjaan.<sup>43</sup>

### Objek (Object)

Objek didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*“An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it.”<sup>44</sup>*

Objek (Object) adalah tahap struktur kognitif dimana siswa menyadari proses-proses transformasi tersebut sebagai satu kesatuan, dan sadar bahwasanya transformasi dapat dilakukan dalam satu kesatuan tersebut.<sup>45</sup> Proses-proses baru dapat juga dikonstruksi (dibentuk) dengan cara mengkoordinasi proses-proses yang sudah ada. Bila hal tersebut menjadi suatu proses sendiri untuk ditransformasikan oleh suatu aksi, maka dikatakan proses itu telah dienkapsulasikan menjadi suatu objek.<sup>46</sup>

Jadi, enkapsulasi (encapsulation) merupakan suatu transformasi mental dari suatu proses pada suatu objek kognitif, dengan indikasinya seorang individu melakukan refleksi pada penerapan operasi untuk proses tertentu, menjadi sadar terhadap proses secara totalitas bahwa ternyata transformasi (apakah aksi atau proses) dapat dilakukan dan dikonstruksi secara nyata sebagai transformasi.<sup>47</sup>

### Skema (Schema)

Skema didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*“A schema for a certain mathematical concept in an individual’s collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by some general principles to form a framework in the individual’s mind that may be brought to bear upon a problem situation involving that concept.”<sup>48</sup>*

Skema (Schema) adalah kumpulan aksi, proses, objek dan mungkin skema lain yang dihubungkan dengan beberapa prinsip umum untuk

<sup>43</sup> Lasmi Nurdin, Analisa Pemahaman Siswa SMA..., hal.14

<sup>44</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. APOS: A Constructivist Theory..., hal. 3

<sup>45</sup> Minanur Rohman. Analisis Miskonsepsi Siswa..., hal. 22

<sup>46</sup> Dubinsky, Ed. Using A Theory of..., hal. 5

<sup>47</sup> Maryono, Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa..., hal. 18

<sup>48</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. APOS: A Constructivist Theory..., hal. 3

membentuk kerangka berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep yang dipelajarinya.<sup>49</sup>

Konstruksi yang mengaitkan aksi, proses, objek yang terpisah untuk objek tertentu sehingga menghasilkan suatu skema tertentu disebut tematisasi.<sup>50</sup> Kejadian-kejadian kognitif menginteriorisasikan suatu aksi menuju suatu proses, mengenkapsulasikan suatu proses ke dalam suatu objek, dan mentematisasikan suatu objek ke dalam skema dalam kerangka teori ini disebut ekuilibrisasi.<sup>51</sup>

Selanjutnya, Zaskis dan Campbell mengungkapkan bahwa kejadiankejadian kognitif ini dapat dijelaskan dengan baik dalam kerangka teori APOS (Action, Process, Object). Perbedaan antara aksi dengan proses ditunjukkan oleh kegiatan prosedural dan pemahaman prosedural. Sedangkan perbedaan antara proses dan objek ditunjukkan oleh suatu pemahaman prosedural dan pemahaman konseptual.<sup>52</sup>

Skema mempunyai peranan yang signifikan dalam Teori APOS untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa dalam proses belajar mengajar. Menurut Baker et. al, skema yang baik merupakan koleksi yang koheren dari aksi, proses, objek, dan konstruksi skema sebelumnya yang dikoordinasi dan disintesis oleh seseorang untuk membentuk susunan yang dipakai dalam suatu masalah.<sup>53</sup>

Seseorang dapat menunjukkan koherensi skema dengan mempertajam apa yang termuat dalam skema dan apa yang tidak. Misalnya, siswa memikirkan suatu skema dan merubahnya menjadi suatu objek untuk mewujudkan tindakantindakan baru. Melalui transformasi ini, skema bisa berubah menjadi objek. Objek dapat diubah melalui tindakan yang lebih tinggi yang mengarah pada proses, objek, dan skema baru untuk menyusun konsep-konsep baru. Oleh karena itu, perkembangan aksi, proses, dan objek dapat

---

<sup>49</sup> Minanur Rohman. Analisis Miskonsepsi Siswa..., hal. 22

<sup>50</sup> Ed. Dubinsky, Using A Theory of..., hal. 6

<sup>51</sup> R. Zaskis and Campbell, Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teacher's Understanding (Journal Mathematics Education). 27 (4): 540 – 563

<sup>52</sup> Lasmi Nurdin, Analisa Pemahaman Siswa SMA Laboratorium..., hal. 14

<sup>53</sup> B Baker et. al, A Calculus Graphing Schema. Journal For Research in Mathematics Education. 2000. p.31(5): 557 – 558

terus dikonstruksi dalam skema yang ada. Seorang tokoh psikologi perkembangan yaitu Piaget, tertarik untuk mengadakan studi tentang bagaimana individu beradaptasi dengan lingkungannya.

Menurutnya, kemampuan individu beradaptasi dengan lingkungannya sangat dipengaruhi oleh struktur mental dan kognitif yang disebut skema. Kemampuan individu beradaptasi itulah yang akan mempermudah perkembangan kognitif seseorang. Berdasarkan ide Piaget tersebut, Dubinsky mengadaptasi menjadi suatu teori perkembangan skema seseorang yang berpusat pada pikiran secara matematis, berupa kerangka kerangka Teori APOS (Aksi, Proses, Objek, Skema).

Keempat tahap tersebut tersusun secara hierarkis, artinya siswa harus melewati tahap tertentu untuk naik ke tahap selanjutnya. Hal ini disebabkan setiap pembahasan satu komponen saling berkaitan dengan komponen lainnya secara berurutan. Namun pada kenyataannya, ketika seseorang mengembangkan pemahamannya terhadap suatu konsep matematika, tidaklah selamanya dilakukan secara linear. Misalnya, ketika seseorang dihadapkan pada suatu soal limit fungsi, maka kemungkinan dia tidak mulai dari tahap aksi tetapi mulai dari tahap objek kemudian baru tahap lainnya. Jadi tidak menutup kemungkinan bahwa, jika siswa sudah berada dalam tahap objek atau bahkan skema, maka siswa tersebut mungkin tidak perlu melewati tahap proses. Ini dikarenakan proses-proses transformasi telah terinteriorisasi sempurna ke dalam pikiran siswa.

Dalam makalahnya, Dubinsky menulis :

*“APOS Theory can be used directly in the analysis of data by a researcher. In very fine grained analysis, the researcher can compare the success or failure of students on a mathematical task with the specific mental construction they may or may not have made,”<sup>54</sup>*

Teori APOS ini dapat digunakan untuk menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep. Misalnya dalam pemahaman siswa dalam materi matematika.

---

<sup>54</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning..., hal. 4

Dari beberapa penjelasan mengenai teori APOS tersebut, maka dapat kita lihat dalam teori ini dapat menjawab tentang pemahaman matematika yang dimiliki oleh seorang siswa.

### C. KESIMPULAN

1. Pemahaman adalah proses, cara, perbuatan memahami atau memahamkan. Pemahaman (*understanding*) yaitu kedalaman kognitif, dan afektif yang dimiliki oleh individu.
2. Indikator dalam pemahaman matematika adalah sebagai berikut:
  - a). kemampuan menyatakan ulang sebuah konsep yang dipelajari;
  - b). kemampuan mengklasifikasikan objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya);
  - c). kemampuan menyebutkan contoh dan non-contoh dari konsep;
  - d). kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis;
  - e). kemampuan menggunakan, memanfaatkan dan memilih prosedur atau operasi tertentu;
  - f). kemampuan mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.
  - g). kemampuan mengembangkan syarat perlu dan syarat cukup suatu konsep
3. Teori APOS adalah suatu teori belajar yang lahir dari hipotesis bahwasanya pengetahuan matematika berada dalam kecenderungan individu untuk terlibat dalam situasi masalah matematika dengan cara memanipulasi mental aksi, proses, objek dan mengorganisasi ketiganya dalam skema..
4. Teori APOS dapat digunakan untuk menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep. Misalnya dalam pemahaman siswa dalam materi matematika.

**Penulis** : Fatrima Santri Syafri, M.Pd. Mat adalah Dosen pada Fakultas Tarbiyah dan Tadris Institut Agama Islam negeri (IAIN) Bengkulu. (Email : kimirakim21@gmail.com)

### DAFTAR PUSTAKA

- Davis, G.E., Tall. What is A Schema?,(online).  
(<http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpops/schemes.htm>), diakses 27 Juni 2016
- Duffin, J.M.& Simpson, A.P. 2000. A Search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*. 18(4)
- Ed Dubinsky, *Using A Theory of Learning in College Mathematics Course*, (Online, 2000),  
(<http://www.bham.ac.uk./ctimath/talum12.htm> or <http://www.telri.ac.uk/>,  
diakses tanggal 27Juni 2016)
- Even, R. dan Tirosh, D. (2002). Teacher Knowledge and Understanding of Students' Mathematical Learning. Dalam L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Erman Suherman et.al, *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*, (Bandung: JICA, 2003).
- E, Mulyasa. *Kurikulum Berbasis Kompetensi*. (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2010)
- Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 2003),
- Herman Hudojo, *Mengajar Belajar Matematika*, (Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Dirjen Dikti PPLPTK, 1988)
- Idris, N. (2009). "Enhancing Students' Understanding In Calculucus Trough Writing". *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 4, (1).
- Jihad, A. (2008). *Pengembangan Kurikulum Matematika*. Yogyakarta: Multi Pressindo
- Jihad, A. dan Haris. (2010). *Evaluasi Pembelajaran*. Yogyakarta: Multi Pressindo.
- Kilpatrick, J.,Swafford, J.,& Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kinach, M., B. (2002). Understanding and Learning to Explain by Representing Mathematics: Epistemological Dilemmas Facing Teacher Educators in the Secondary Mathematics "Method" Course. *Journal of MathematicsTeacher Education*,5, 153-186.
- NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA : NCTM

Ngalim Purwanto, *Prinsip – prinsip dan Teknik Evaluasi Pengajaran*, (Bandung:Remaja Rosdakarya, 2008)

Perkins, D. N. & Simmons, R. (1988). Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, Vol. 58, No. 3 (Autumn, 1988), 303-326.

Ruseffendi, E.T. (2006). *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Potensinya dalam Pengajaran Matematika Untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito

Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia* (Jakarta: Direktorat Jendral DIKTI, DEPDIKNAS, 2000)

Suherman. dkk. (2003). *Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Bandung: Jica

Sumarmo, U. (2010). *Berfikir dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan Pada Peserta Didik*. *Jurnal FMIPA UPI Bandung*.

Walle, J.A.V.D. (2008). *Matematika Sekolah Dasar dan Menengah Pengembangan Pengajaran*. Jakarta: Erlangga